Quadratische Gleichungen

Jede Gleichung mit höchstens x^2-Terme lässt sich auf die Form: $x^2 + px + q = 0$

zurückführen. Darauf wendet man die Lösungsformel: $\boxed{{}_1x_2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$

(ACHTUNG: viele **MINUS**) an.

Beispiel: $5x^2 + 10x - 40 = 0$ ist in der Grundmenge IR zu lösen

Lösung:

$5x^2 + 10x - 40 = 0 \quad | :5$

$x^2 \boxed{+2}x - 8 = 0$

$${}_1x_2 = -\frac{\boxed{p}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\boxed{p}}{2}\right)^2 - q}$$ und $p = 2$ $q = -8$

$${}_1x_2 = -\frac{\boxed{2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\boxed{2}}{2}\right)^2 - (-8)}$$ $\rightarrow \sqrt{1+8} = \sqrt{9} = 3$

${}_1x_2 = -1 \pm 3$

$x_1 = -1+3 = 2$

$x_2 = -1-3 = -4$

L = {2; –4}

Lösungsfälle:

$x^2 \boxed{+2}x - 3 = 0$	$x^2 - 6x + 9 = 0$	$x^2 - 2x + 8 = 0$
${}_1x_2 = -\frac{\boxed{2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\boxed{2}}{2}\right)^2 - (-3)}$	${}_1x_2 = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - (9)}$	${}_1x_2 = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (8)}$
${}_1x_2 = -1 \pm \sqrt{1^2 + 3}$	${}_1x_2 = 3 \pm \sqrt{(3)^2 - (9)}$	${}_1x_2 = 1 \pm \sqrt{(1)^2 - (8)}$
${}_1x_2 = -1 \pm 2$	${}_1x_2 = 3 \pm 0$	${}_1x_2 = 1 \pm \sqrt{(1) - (8)}$
$x_1 = -1 + 2 = 1$	$x_1 = 3$	${}_1x_2 = 1 \pm \sqrt{-7}$
$x_2 = -1 - 2 = -3$	$x_2 = 3$	
L = {1; –3}	L = {$3^{(2)}$}	L={ }
2 verschiedene Lösungen	1 Doppellösung	Keine reelle Lösung

Sonderfälle: nur 2 der drei Summanden (Monome) sind vorhanden:

TYP: $a x^2 + b = 0$	**TYP: $a x^2 + bx = 0$**
$4x^2 - 16 = 0$ |:4 $x^2 - 4 = 0$ |+4 $x^2 = 4$ |$\pm\sqrt{\ }$ $x = \pm 2$ L={–2; 2}	$3x^2 + 9x = 0$ |:3 $x^2 + 3x = 0$ | x Herausheben $x\cdot(x+3) = 0$ | Ein Produkt ist dann Null, wenn ein Faktor Null ist $x = 0$ oder $x+3 = 0$ |+3 $x_1 = 0$ und $x_2 = -3$ L = {–3; 0}
Lösung mit der Formel: $x^2 \boxed{+0}x - 4 = 0$ $_1x_2 = -\frac{\boxed{0}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\boxed{0}}{2}\right)^2 - (-4)}$ $_1x_2 = 0 \pm \sqrt{4}$ $_1x_2 = 0 \pm 2$ L={–2; 2}	$x^2 \boxed{+3}x + 0 = 0$ $_1x_2 = -\frac{\boxed{3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\boxed{3}}{2}\right)^2 - (0)}$ $_1x_2 = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2}$ $_1x_2 = \frac{3}{2} \pm \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3$ und $x_2 = 0$ L={0; 3}

Satz von Vietá (Umkehrung)

Hat die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ in IR zwei Lösungen x_1, x_2 (oder eine Doppellösung $x_1 = x_2$), so gilt:

1) **$x_1 + x_2 = -p$**, d.h. die Summe der Lösungen hat den gleichen Betrag, aber entgegengesetztes Vorzeichen wie der Koeffizient des linearen Gliedes.
2) **$x_1 \cdot x_2 = q$** , d.h. das Produkt der Lösungen ist gleich dem konstanten Glied.
3) **$x^2 + px + q = (x - x_1)\cdot(x - x_2)$**, d.h. der Term lässt sich in zwei Linearfaktoren zerlegen

1) Wie bekommt man aus den Lösungen 2 und –3 die quadratische Gleichung dazu ?
Antwort: (x – Lösung1) · (x – Lösung2) = 0 ergibt nach der Ausmultiplikation die gesuchte Gleichung

$$(x-2)\cdot(x-(-3)) = 0$$
$$(x-2)\cdot(x+3) = 0$$
$$x^2 + 3x - 2x + 6 = 0$$
$$\mathbf{x^2 + x + 6 = 0}$$

2) Wie kann man den Term $x^2 + 4x - 5$ in 2 Linearfaktoren $(x - \text{Zahl1})\cdot(x - \text{Zahl2})$ zerlegen?
Antwort: Man löst die quadratische Gleichung: $x^2 + 4x - 5 = 0$ und setzt die Lösungen in die Zerlegungsformel ein:

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$${}_1x_2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$${}_1x_2 = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-5)}$$

$${}_1x_2 = -2 \pm \sqrt{(2)^2 + 5}$$

$${}_1x_2 = -2 \pm \sqrt{9}$$

$${}_1x_2 = -2 \pm 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2 + 3 = \mathbf{1} \quad \text{und} \quad x_2 = -2 - 3 = \mathbf{-5}$$

Zerlegung: $x^2 + 4x + 5 = (x - 1)\cdot(x - (-5))$

Quadratische TEXT-Gleichungen

Beispiel:
Subtrahiert man vom **Produkt zweier Zahlen**, die **sich um 2 unterscheiden**, das **Doppelte der kleineren Zahl**, so erhält man **529**. Berechne die beiden Zahlen!

Lösung:
Zahl 1: x
Zahl 2: $x+2$
Produkt: $x\cdot(x+2)$
das Doppelte der kleineren Zahl: $2\cdot x$
Subtrahieren ergibt 529: $x\cdot(x+2) - 2x = 529$

Lösen der Gleichung:

$$x^2 + 2x - 2x = 529$$
$$x^2 = 529$$
$$x = \pm 23$$

Probe: $23\cdot 25 - 2\cdot 23 = 529$ **OK**
$(-23)\cdot(-21) - 2\cdot(-23) = 529$ **OK**

Lösung: L={(-23,-21), (23,25) }